

## ПОПЕРЕЧНИКИ КОЛМОГорова И НЕНАСЫЩАЕМЫЕ МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ РЕШЕНИЯМИ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ (ЧАСТЬ II. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ)

### Аннотация.

*Актуальность и цель.* В статье К. И. Бабенко «О некоторых задачах теории приближений и численного анализа»<sup>1</sup> среди ряда важных проблем вычислительной математики были сформулированы две проблемы: 1) вычисление поперечников Колмогорова и Бабенко на классе  $Q_r(\Omega, M)$  (класс  $Q_r(\Omega, M)$  состоит из функций, имеющих непрерывные производные до  $r$ -го порядка в области  $\Omega$  и производные до  $(2r + 1)$ -го порядка в области  $\Omega \setminus \partial\Omega$ , причем модуль производной  $k$ -го порядка ( $r < k \leq 2r + 1$ ) оценивается неравенством  $\|D^k f\| \leq c / (d(x, \partial\Omega))^{k-r}$ , где  $d(x, \partial\Omega)$  – расстояние от точки  $x$  до  $\partial\Omega$  границы области); 2) построение ненасыщаемых методов аппроксимации классов функций. Настоящая работа посвящена вычислению поперечников Колмогорова и Бабенко классов  $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$  и  $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$  функций многих переменных, являющихся обобщением класса функций  $Q_r(\Omega, M)$ ; построению оптимальных по порядку методов приближения функций этих классов и построению ненасыщаемых алгоритмов аппроксимации, точность которых отличается от точности оптимальных множителем  $O(\ln^\alpha n)$ , где  $n$  – число функционалов, используемых при построении алгоритма,  $\alpha$  – некоторая константа. Классам функций  $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ ,  $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$  принадлежат решения эллиптических уравнений, слабосингулярных, сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений.

*Материалы и методы.* Вычисление поперечника Колмогорова основано на оценке снизу поперечника Бабенко, оценке сверху поперечника Колмогорова и на использовании леммы, устанавливающей связь между поперечниками. Для оценки сверху поперечника Колмогорова строятся локальные сплайны, которые являются оптимальными методами приближения классов функций  $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ ,  $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ .

*Результаты и выводы.* Построены оптимальные методы аппроксимации классов функций  $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ ,  $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ , которые могут быть положены в основу эффективных численных методов решения эллиптических уравнений, слабосингулярных, сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений.

---

<sup>1</sup> Успехи математических наук. – 1985. – Т. 40, № 1. – С. 3–28.

**Ключевые слова:** пространство Соболева, поперечники, ненасыщаемые методы аппроксимации, сплайны.

I. V. Boykov

**KOLMOGOROV WIDTHS AND UNSATURABLE  
APPROXIMATION OF FUNCTION CLASSES, DETERMINED  
BY SOLUTIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS' EQUATIONS  
(PART II. FUNCTION OF MULTIPLE VARIABLES)**

**Abstract.**

*Background.* The article by K. I. Babenko «On some problems of the theory of approximations and numerical analysis»<sup>1</sup> among a number of important problems of calculus mathematics formulates two problems: 1) calculation of Kolmogorov and Babenko widths for  $Q_r(\Omega, M)$  class ( $Q_r(\Omega, M)$  class consists of functions with continuous derivatives up to  $r$  order in  $\Omega$  range and derivatives up to  $(2r + 1)$  order in  $\Omega \setminus \partial\Omega$  range, and the magnitude of a derivative of  $k$  order ( $r < k \leq 2r + 1$ ) is evaluated by the inequality  $\|D^k f\| \leq c / (d(x, \partial\Omega))^{k-r}$ , where  $d(x, \partial\Omega)$  is a distance from point  $x$  to  $\partial\Omega$  range border; 2) building of unsaturable methods of function classes approximation. The present study is devoted to calculation of Kolmogorov and Babenko widths of  $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$  and  $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$  classes of functions with multiple variables, being a generalization of  $Q_r(\Omega, M)$  function class; to building of the optimal in methods order approximation of functions of these classes and building of unsaturable algorithms of approximation, the accuracy of which differs from the accuracy of the accurate ones by  $O(\ln^\alpha n)$  multiplier, where  $n$  is a number of functionals used in algorithm building,  $\alpha$  is a certain constant.  $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ ,  $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$  function classes possess solutions of elliptical equations, weakly singular, singular and hypersingular integral equations.

*Materials and methods.* Calculation of Kolmogorov width is based on evaluation of Babenko width from the bottom, evaluation of Kolmogorov width from the top and on usage of a lemma establishing a bond between widths. To evaluate Kolmogorov width from the top it is necessary to build local splines that appear to be optimal methods of approximation of  $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ ,  $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$  function classes.

*Results and conclusions.* The author built optimal methods of approximation of  $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ ,  $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$  function classes that may serve as a base of effective numerical methods of solution of elliptical equations, weakly singular, singular and hypersingular integral equations.

**Key words:** Sobolev space, widths, unsaturable methods of approximation, splines.

Данная статья является продолжением работы [1]. В ней используются обозначения, приведенные в [1], и продолжается нумерация разделов.

---

<sup>1</sup> Успехи математических наук. – 1985. – Т. 40, № 1. – С. 3–28.

#### 4. Класс функций $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ , $\Omega = [-1, 1]^l$ , $l = 2, 3, \dots$

В этом разделе вычисляются поперечники Колмогорова и Бабенко класса функций  $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$  и строятся оптимальные по порядку алгоритмы аппроксимации функций из этих классов.

Пусть  $f \in \bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)$ ,  $u = 1, 2, \dots$ . Пусть  $v = s / (s - \gamma)$ .

Вначале рассмотрим случай, когда  $v < l(l-1)$ .

Обозначим через  $\Delta^k$  множество точек  $t$ , удовлетворяющих неравенствам  $\Delta^k = \{t \in \Omega : (k/N)^v \leq d(t, \Gamma) \leq ((k+1)/N)^v, k = 0, 1, \dots, N-1\}$ .

Разделим области  $\Delta^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , на более мелкие части следующим образом. Покроем каждую из областей  $\Delta^k$  кубами и параллелепипедами  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$  с ребрами, параллельными координатным осям и имеющими длины не меньше  $h_k$  и не больше  $2h_k$ , где  $h_k = ((k+1)/N)^v - (k/N)^v$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

Обозначим через  $n$  число областей  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . В работах [2, 3] показано, что

$$d_n(\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, 1), C) \cup \cap cn^{-s/l}. \quad (1)$$

Пусть  $M_0 = \lceil (\ln N)^{u/r} \rceil$ ,  $M_k = \lceil (\ln N / k)^{(u-1)/s} \rceil$ ,  $k = 1, \dots, N-1$ . Напомним, что символ  $\lceil \cdot \rceil$  означает округление до целого в большую сторону. Разделим каждое ребро в области  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$  на  $M_k$  равных частей и через точки деления проведем плоскости, параллельные координатным плоскостям. В результате области  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$  покрываем более мелкими областями  $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k$ .

В разд. 3 для аппроксимации функций  $f$  одной переменной был введен интерполяционный полином  $P_s(f, [a, b])$ . Построим интерполяционный полином для аппроксимации функций  $f(x_1, \dots, x_l) \in C[a_1, b_1; \dots; a_l, b_l]$ . Определим интерполяционный полином  $P_{s, \dots, s}(f; [a_1, b_1; \dots; a_l, b_l])$  формулой  $P_{s, \dots, s}(f; [a_1, b_1; \dots; a_l, b_l]) = P_s^{t_1}(P_s^{t_2}(\dots P_s^{t_l}(f; [a_l, b_l]); [a_{l-1}, b_{l-1}]); \dots; [a_1, b_1])$ . Это полином степени  $(s-1)$  по каждой переменной  $t_1, \dots, t_l$ . Другими словами,  $P_s^{t_l}(f; [a_l, b_l])$  интерполирует  $f$  по переменной  $t_l \in [a_l, b_l]$ ;  $P_s^{t_{l-1}}(P_s^{t_l}(f; [a_l, b_l]), [a_{l-1}, b_{l-1}])$  интерполирует  $P_s^{t_l}(f; [a_l, b_l])$  по переменной  $t_{l-1} \in [a_{l-1}, b_{l-1}]$  и т.д. Собирая вместе интерполяционные полиномы  $P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k)$ , строим локальный сплайн  $f_N$ .

Оценим точность аппроксимации  $f \in \overline{Q}_{r\gamma}^u(\Omega, 1)$  сплайном  $f_N$ .

Пусть  $k = 0$ , тогда

$$\left\| f - P_{s,\dots,s} \left( f, \Delta_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}^0 \right) \right\| \leq c E_{r-1,\dots,r-1} \left( f, \Delta_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}^0 \right) \lambda_r^l,$$

где  $E_{r,\dots,r} \left( f, \Delta_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}^0 \right)$  – наилучшее приближение функции  $f \in C \left( \Delta_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}^0 \right)$  полиномами степени  $r$  по каждой переменной;  $\lambda_r$  – константа Лебега.

Оценим  $E_{r-1,\dots,r-1} \left( f, \Delta_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}^0 \right)$ , воспользовавшись формулой Тейлора [4]:

$$f(t_1, \dots, t_l) = \sum_{\alpha=0}^r \frac{1}{\alpha!} \sum_{j_1=1}^l \dots \sum_{j_\alpha=1}^l \left( t_{j_1} - t_{j_1}^0 \right) \dots \left( t_{j_\alpha} - t_{j_\alpha}^0 \right) \frac{\partial^\alpha f(t^0)}{\partial t_{j_1} \dots \partial t_{j_\alpha}} + R_{r+1}(t), \quad (2)$$

где  $R_{r+1}(t) = (r+1) \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{(t-t^0)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-\tau)^r f^{(\alpha)}(t^0 + \tau(t-t^0)) d\tau$ ;  $h_{00} = h_0 / M_0$ ,

$h_0 = 1 / N^v$ ;  $t, t^0$  – точки области  $\Delta_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}^0$ , имеющей непустое пересечение с границей  $\Gamma = \partial\Omega$ .

Тогда

$$d(t^0 + \tau(t-t^0), \Gamma) \leq h_{00} \leq h_0 / \left\lceil (\ln N)^{u/r} \right\rceil \text{ и } \left| f^{(r)}(t^0 + \tau(t-t^0)) \right| \leq 1 + |\ln^u h_{00}|,$$

где  $h_{00} = h_0 / M_0$ ,  $h_0 = 1 / N^v$ ; и

$$\begin{aligned} E_{r-1,\dots,r-1}(f, \Delta_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}^0) &\leq c h_{00}^r \int_0^1 (1-\tau)^{r-1} (1 + |\ln^u(\tau h_{00})|) d\tau \leq \\ &\leq c h_{00}^r \ln^u h_{00} \leq c \left( \frac{1}{N} \right)^{vr} = c \left( \frac{1}{N} \right)^s; \end{aligned}$$

$$\left\| f - P_{s,\dots,s} \left( f, \Delta_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}^0 \right) \right\|_{C(\Delta_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}^0)} \leq c \left( \frac{1}{N} \right)^s. \quad (3)$$

Аналогичная оценка справедлива для всех областей  $\Delta_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}^0$ .

Пусть  $1 \leq k \leq N-1$ , тогда

$$\left\| f - P_{s,\dots,s} \left( f, \Delta_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}^k \right) \right\|_{C(\Delta_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}^k)} \leq$$

$$\leq c \left( \left( ((k+1)/N)^v - (k/N)^v \right) \frac{1}{(\ln(k/N))^{(u-1)/s}} \right)^s \frac{(1 + |\ln(k/N)^v|)^{u-1}}{(k/N)^{v\gamma}} \leq \frac{c}{N^s}. \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует

$$\|f - f_N\| \leq cN^{-s}. \quad (5)$$

Оценим число  $n$  узлов, используемых для построения сплайна  $f_N$ .

Пусть  $m$  – число граней у  $\Omega$ . Очевидно,

$$\begin{aligned} n \cup m \sum_{k=1}^{N-1} \left( \frac{2 - 2(K/N)^v}{((k+1)/N)^v - (k/N)^v} \right)^{l-1} M_k^l + mN^{v(l-1)} [\ln N]^{lu/r} \cup \\ \cup cN^{v(l-1)} (\ln N)^{lu/r} + c \sum_{k=1}^{N-1} \left( \frac{2N^v - 2k^v}{v(k+\theta)^{v-1}} \right)^{l-1} \left( 1 + (\ln(N/k))^{\frac{u-1}{s}} \right)^l \cup cN^l. \quad (6) \end{aligned}$$

Из неравенств (5) и (6) следует оценка

$$\|f - f_N\| \leq cn^{-s/l}. \quad (7)$$

Опишем изменения, необходимые для построения непрерывного сплайна, имеющего оценку погрешности (7). Пусть  $\Delta^k$  – области, введенные выше, и  $h_k = ((k+1)/N)^v - (k/N)^v$ ,  $h_k^* = h_k / M_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Разбиение областей  $\Delta^k$  на более мелкие области сделаем следующим образом. Покроем область  $\Delta^{N-2}$  кубами и параллелепипедами  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-2}$ , ребра которых параллельны координатным осям и их длины не меньше  $h_{N-2}$  и не больше  $2h_{N-2}$ . При этом вершины куба  $\Delta^{N-1}$  входят в число вершин областей  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-2}$ , расположенных на поверхности  $\Delta^{N-1} \cap \Delta^{N-2}$ .

Затем разделим каждое ребро области  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-2}$  на  $M_{N-2}$  равных частей и через точки деления проведем плоскости, параллельные координатным плоскостям. В результате область  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-2}$  покрывается областями  $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-2}$ .

Чтобы покрыть область  $\Delta^{N-3}$  кубами и параллелепипедами  $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-3}$ , проведем плоскости, параллельные координатным плоскостям через вершины областей  $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-2}$ , расположенные на поверхности  $\Delta^{N-2} \cap \Delta^{N-3}$ . Обозначим полученные области через  $g_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-3}$ . Пусть

$h_{N-3}^* = h_{N-3} / M_{N-3}$ . Рассмотрим область  $g_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-3} = [a_1, b_1; \dots; a_l, b_l]$ .

Если длина ребра  $(a_k, b_k)$  превышает  $2h_{N-3}^*$ , то это ребро делим на  $[|b_k - a_k| / h_{N-3}^*]$  равных частей и проводим через точки деления плоскости, параллельные координатным плоскостям. Полученные в результате области обозначим через  $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-3}$ . Продолжая этот процесс, покроем область  $\Omega$  кубами и параллелепипедами  $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k, k = 0, 1, \dots, N-2$ . Число областей  $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k, k = 0, 1, \dots, N-2$ , в  $\Omega$  оценивается равенством (6).

Построим теперь непрерывный локальный сплайн  $f_N^*$ , аппроксимирующий  $f \in \bar{Q}_{r, \gamma}^u(\Omega, 1)$ . Полином  $P_{s, \dots, s}(f, \Delta^{N-1})$  интерполирует  $f$  в  $\Delta^{N-1}$ ,  $P_{s, \dots, s}(\bar{f}, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-2})$  интерполирует  $\bar{f}$  в  $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-2}$ . Функция  $\bar{f}$  равна  $f$  во всех точках области  $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-2}$ , за исключением точек, расположенных на поверхности  $\Delta^{N-1} \cap \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-2}$ . В этих точках  $\bar{f}$  равна  $P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-1})$ . Продолжая этот процесс, строим интерполяционные полиномы  $P_{s, \dots, s}(\bar{f}, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k), k = N-3, N-2, \dots, 1, 0$ .

Объединяя полиномы  $P_{s, \dots, s}(f, \Delta^{N-1}), P_{s, \dots, s}(\bar{f}, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k), k = 0, 1, \dots, N-2$ , получаем непрерывный локальный сплайн  $f_N^*$ .

Повторяя рассуждения, приведенные выше для кусочно-непрерывного локального сплайна, приходим к оценке

$$\|f - f_N^*\|_{C(\Omega)} \leq cN^{-s}. \quad (8)$$

Так как  $f_N^*$  – непрерывный сплайн, то из (6), (8) следует, что при  $v < l / (l-1)$

$$d_n(\bar{Q}_{r, \gamma}^u(\Omega, 1), C) \leq cn^{-s/l}. \quad (9)$$

Для получения снизу оценки поперечника Колмогорова воспользуемся известным [5] неравенством

$$\delta_n(X) \leq 2d(X, B), \quad (10)$$

где  $X$  – компакт в банаховом пространстве  $B$ .

Известно [2, 3], что  $\delta_n(Q_{r, \gamma}(\Omega, 1)) \geq cn^{-s/l}$ . Так как  $Q_{r, \gamma}(\Omega, 1) \subset \bar{Q}_{r, \gamma}^u(\Omega, 1)$ , то

$$\delta_n(\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, 1) \geq cn^{-s/l}. \quad (11)$$

Из неравенств (9)–(11) следует

**Теорема 1.** Пусть  $\Omega = [-1, 1]^l$ ,  $l \geq 2$ ,  $u = 1, 2, \dots$ ,  $v = s / (s - \gamma)$ ,  $v < l / (l - 1)$ . Справедливы оценки  $\delta_n(\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, 1) \cup d_n(\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, 1), C) \cup n^{-s/l}$  и сплайны  $f_N$  и  $f_N^*$  являются оптимальными по порядку методами аппроксимации функций  $f \in \bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)$ .

Пусть  $v = l / (l - 1)$ . Для аппроксимации функций  $f \in \bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)$  при  $v = l / (l - 1)$  используется построенный выше непрерывный локальный сплайн  $f_N^*$  с оценкой точности

$$\|f - f_N^*\| \leq cN^{-s}. \quad (12)$$

Оценим число  $n$  узлов, используемых при построении сплайна  $f_N^*$ :

$$\begin{aligned} n \cup m \sum_{k=1}^{N-1} \left( \frac{2 - 2(k/N)^v}{((k+1)/N)^v - (k/N)^v} \right)^{l-1} M_k^l + mN^{v(l-1)} [\ln N]^{lu/r} \cup \\ \cup cN^l (\ln N)^{lu/r} + c \sum_{k=1}^{N-1} \left( \frac{N^v}{k^{v-1}} \right)^{l-1} \left[ \ln \frac{N}{k} \right]^{(u-1)l/s} \cup \\ \cup c \begin{cases} N^l (\ln N)^{lu/r}, & lu/r \geq 1 + (u-1)l/s, \\ N^l (\ln N)^{(u-1)l/s+1}, & lu/r \leq 1 + (u-1)l/s. \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

Из неравенств (12) и (13) имеем

$$\|f - f_N^*\| \leq c \begin{cases} n^{-s/l} (\ln n)^{us/r}, & u/r \geq 1/l + (u-1)/s, \\ n^{-s/l} (\ln n)^{u-1+s/l}, & u/r \leq 1/l + (u-1)/s. \end{cases} \quad (14)$$

Так как сплайн  $f_N^*$  непрерывный, то при  $v = l / (l - 1)$

$$d_n(\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, 1), C) \leq \begin{cases} n^{-s/l} (\ln n)^{us/r}, & u/r \geq 1/l + (u-1)/s, \\ n^{-s/l} (\ln n)^{u-1+s/l}, & u/r \leq 1/l + (u-1)/s. \end{cases} \quad (15)$$

Оценим теперь величину поперечника  $\delta_n(\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, 1))$  при  $v = s / (s - \gamma)$ ,  $v = l / (l - 1)$ .

Покроем область  $\Omega$  более мелкими областями  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$  подобно тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 1.

Пусть

$$M_k = \begin{cases} \left\lceil (\ln N)^{(u-1)/s} \right\rceil, & k = 0, \\ \left\lceil (\ln(N/k))^{(u-1)/s} \right\rceil, & k = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

Разделим каждое ребро области  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$  на  $M_k$  равных частей и проведем плоскости, параллельные координатным плоскостям через точки деления. Таким образом, построим покрытие  $\Delta_{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_l}^k$  областей  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

Оценим число  $n$  областей  $\Delta_{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_l}^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Очевидно,

$$n \cup m \sum_{k=1}^{N-1} \left( \frac{2 - 2(k/N)^v}{((k+1)/N)^v - (k/N)^v} \right)^{l-1} M_k^l + m N^{v(l-1)} (\ln N)^{l(u-1)/s} \cup \cup \left\| N^l (\ln N)^{l(u-1)/s} + N^{l-1} \int_1^N \frac{N}{x} \left( \ln \frac{N}{x} \right)^{(u-1)l/s} dx \right\| \cup N^l (\ln N)^{(u-1)l/s+1}. \quad (16)$$

Пусть  $\Delta_{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_l}^k = [b_{i_1, j_1}, b_{i_1, j_1+1}, \dots, b_{i_l, j_l}, b_{i_l, j_l+1}]$ .

Введем функцию

$$\begin{aligned} \varphi_{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_l}^k(t) &= A_k \frac{((t_1 - b_{i_1, j_l})(b_{i_1, j_l+1} - t_1) \cdots (t_l - b_{i_l, j_l})(b_{i_l, j_l+1} - t_l))^s}{(h_k / M_k)^{3s} ((k+1)/N)^{v\gamma}} \times \\ &\times \left( 1 + \left| \ln^{u-1} \left( \frac{k+1}{N} \right)^v \right| \right) \text{ при } t \in \Delta_{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_l}^k, \\ \varphi_{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_l}^k(t) &= 0 \text{ при } t \in \Omega \setminus \Delta_{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_l}^k, \end{aligned}$$

$k = 0, 1, \dots, N-2$ .

Константы  $A_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-2$ , выбираются так, что

$$\left| D^s \varphi_{i_1, \dots, i_l}^k \right| \leq \frac{1 + \left| \ln^{u-1} ((k+1)/N)^v \right|}{((k+1)/N)^{v(s-r)}}.$$

Пусть  $\Delta^{N-1} = [b_{i_1}, b_{i_1+1}, \dots, b_{i_l}, b_{i_l+1}]$ . Введем функцию

$$\varphi^{N-1}(t) = \begin{cases} A_{N-1} \frac{\left((t_1 - b_{i_1})(b_{i_1+1} - t_1) \cdots (t_l - b_{i_l})(b_{i_l+1} - t_l)\right)^s}{h_{N-1}^{3s}}, & t \in \Delta^{N-1}, \\ 0, & t \in \Omega \setminus \Delta^{N-1}, \end{cases}$$

Константа  $A_{N-1}$  выбирается так, чтобы  $|D^s \varphi^{N-1}| \leq 1$ . Пусть

$$\xi(t) = \sum_{k, i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l} C_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k \varphi_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k(t),$$

где  $|C_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k| \leq 1$ .

Здесь суммирование выполняется по всем областям  $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k \subset \Omega$ .

Повторяя рассуждения, приведенные в [2, 3], приходим к неравенству

$$\delta_n(\bar{Q}_{r\gamma}^u(\Omega, 1)) \geq \frac{c}{N^s} \geq c \frac{(\ln n)^{u-1+s/l}}{n^{s/l}}. \quad (17)$$

Из (15) и (17) следует

**Теорема 2.** Пусть  $\Omega = [-1, 1]^l$ ,  $l = 2, 3, \dots$ ,  $u = 1, 2, \dots$ ,  $v = s / (s - \gamma)$ ,  $v = l / (l - 1)$ . Тогда

$$\begin{aligned} cn^{-s/l} (\ln n)^{u-1+s/l} &\leq \delta_n(\bar{Q}_{r\gamma}^u(\Omega, 1)) \leq 2d_n(\bar{Q}_{r\gamma}^u(\Omega, 1), C) \leq \\ &\leq c \begin{cases} n^{-s/l} (\ln n)^{us/r}, & u/r \geq 1/l + (u-1)/s, \\ n^{-s/l} (\ln n)^{u-1+s/l}, & u/r \leq 1/l + (u-1)/s, \end{cases} \end{aligned}$$

и сплайны  $f_N$  и  $f_N^*$  являются оптимальными по порядку методами аппроксимации функций  $f \in \bar{Q}_{r\gamma}^u(\Omega, 1)$  при  $u/r \leq 1/l + (u-1)/s$ .

Пусть  $v = s / (s - \gamma)$ ,  $v > l / (l - 1)$ . Построим кусочно-непрерывный локальный сплайн  $f_N$ . Для этого, как и при доказательстве теоремы 1, покроем область  $\Omega$  более мелкими областями  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , число которых равно  $n \underset{\cap}{\cup} N^{v(l-1)}$ .

Локальный сплайн  $f_N$  состоит из полиномов  $P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)$   $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Легко видеть, что при  $1 \leq k \leq N-1$  имеет место оценка

$$\|f - f_N\|_{C(\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)} \leq ch_k^s \frac{|\ln(k/N)|^{v|u-1|}}{((k/N)^v)^\gamma} \leq$$

$$\leq ch_k^s \left( \frac{N}{k} \right)^{v\gamma} (\ln N)^{u-1} = \frac{c}{N^s} (\ln N)^{u-1}. \quad (18)$$

Пусть  $k = 0$ . Без потери общности можно ограничиться рассмотрением  $\Delta_{0,\dots,0}^0 = [-1, t_1; -1, t_1; \dots; -1, t_1]$ , где  $t_1 = -1 + N^{-v}$ . Используя формулу Тейлора (2), имеем

$$\begin{aligned} \|f - f_N\|_{C(\Delta_{0,\dots,0}^0)} &\leq c \lambda_s^l E_{r-1,\dots,r-1}(f, \Delta_{0,\dots,0}^0) \leq \\ &\leq c \max_{t \in \Delta_{0,\dots,0}^0} \left| \sum_{|k|=r} \frac{1}{k!} \int_0^1 (1-\tau)^{r-1} (t+1)^k |\ln^u \tau (t+1)| d\tau \right| \leq ch_0^r |\ln^u h_0| \leq c \frac{\ln^u N}{N^s}, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $t^0 = (-1, \dots, -1)$ ,  $t = (t_1, \dots, t_l)$ .

Из неравенств (18), (19) следует, что

$$\|f - f_N\|_{C(\Omega)} \leq c N^{-s} \ln^u N \leq c n^{-(s-\gamma)/(l-1)} \ln^u n.$$

Непрерывный локальный сплайн  $f_N^*$ , аппроксимирующий  $f \in \overline{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)$  с точностью  $c n^{-(s-\gamma)/(l-1)} \ln^u n$  при  $v > l / (l-1)$ , строится как и в теореме 1.

Таким образом,  $\|f - f_N\| \leq c n^{-(s-\gamma)/(l-1)} \ln^u n$  и, следовательно,

$$d_n(\overline{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, 1), C) \leq c n^{-(s-\gamma)/(l-1)} \ln^u n. \quad (20)$$

Оценим снизу поперечник  $\delta_n(\overline{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, 1))$ . Обозначим через  $\Delta^0$  множество точек  $\Delta^0 = \{t \in \Omega, 0 \leq d(t, \Gamma) \leq 1/N^v = \rho_0\}$ .

Пусть  $\Delta^k = \{t \in \Omega : \rho_{k-1} \leq d(t, \Gamma) \leq \rho_k \leq 1\}$ , где  $\rho_k$  определяется из уравнений  $h_k^s / \rho_k^\gamma = N^{-s} \ln^{u-1} N$ ,  $h_k = \rho_k - \rho_{k-1}, k = 1, 2, \dots, m$ . Здесь  $m$  – наибольшее натуральное число такое, что  $\rho_m \leq 1$ . Если  $\rho_m = 1$ , то  $\Omega$  покрывается множествами  $\Delta^k, k = 0, 1, \dots, m$ . Если  $\rho_m < 1$ , то множество  $\Delta^{m+1}$  определяется неравенствами  $\Delta^{m+1} = \{t \in \Omega : \rho_m \leq d(t, \Gamma) \leq 1\}$ . Будем считать, что  $\rho_m = 1$ .

Покажем, что уравнения  $h_k^s / \rho_l^\gamma = N^{-s} \ln^{u-1} N$  разрешимы.

Пусть  $\rho_k^* = (k/N)^v, k = 0, 1, \dots, N$ ,  $h_k^* = \rho_k^* - \rho_{k-1}^*, k = 1, 2, \dots, N$ . Тогда  $h_1^{*s} / \rho_1^{*\gamma} = N^{-s}$ , если  $k = 1$ . Для  $k = 2, \dots, N$  имеем

$$\frac{h_k^{*s}}{\rho_k^{*\gamma}} = \frac{(k^v - (k-1)^v)^s}{(k/N)^{v\gamma} N^{vs}} = \frac{(v(k-\Theta)^{v-1})^s}{k^{v\gamma}} \frac{1}{N^s} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{v\gamma} v^s \frac{1}{N^s}.$$

Таким образом, существует последовательность  $\rho_k^* = (k/N)^v$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , такая, что  $\frac{h_k^{*s}}{\rho_k^{*\gamma}} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{v\gamma} v^s \frac{1}{N^s} = \frac{c}{N^s}$ ,  $h_k^* = \rho_k^* - \rho_{k-1}^*$ .

С другой стороны, если  $\rho > \rho_{k-1}$ , то  $\varphi(\rho) = (\rho - \rho_{k-1})^s / \rho^\gamma$  – возрастающая функция при любом  $\rho_{k-1}$ .

Поэтому существует последовательность  $\rho_k$  такая, что  $(\rho_k - \rho_{k-1})^s / \rho_k^\gamma \geq N^{-s} \ln^{u-1} N$ ; более того,  $h_k = \rho_k - \rho_{k-1} > h_k^* = \rho_k^* - \rho_{k-1}^*$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ .

Отметим, что число  $m$  областей  $\Delta^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ , меньше, чем  $N$ . Покроем каждую область  $\Delta^k$  кубами и параллелепипедами  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$  таким же способом, как это было сделано при доказательстве теоремы 1. Очевидно, общее число областей  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ , равно  $n \cup n_0 \cup N^{v(l-1)}$ , где  $n_0$  – число областей  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^0$ .

Пусть  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k = [b_{i_1}^k, b_{i_1+1}^k; \dots; b_{i_l}^k, b_{i_l+1}^k]$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ .

Введем функцию

$$\varphi_{i_1, \dots, i_l}^0(t_1, \dots, t_l) = A_0 \begin{cases} \frac{\left( (t_1 - b_{i_1}^0)(b_{i_1+1}^0 - t_1) \cdots (t_l - b_{i_l}^0)(b_{i_l+1}^0 - t_l) \right)^s}{h_0^{(2l-1)s}} N^{v\gamma} \ln^{u-1} N, \\ t \in \Delta_{i_1, \dots, i_l}^0, \\ 0, \quad t \in \Omega \setminus \Delta_{i_1, \dots, i_l}^0; \end{cases}$$

$$\varphi_{i_1, \dots, i_l}^k(t_1, \dots, t_l) = A_k \begin{cases} \frac{\left( (t_1 - b_{i_1}^k)(b_{i_1+1}^k - t_1) \cdots (t_l - b_{i_l}^k)(b_{i_l+1}^k - t_l) \right)^s}{h_k^{(2l-1)s} \rho_k^\gamma}, t \in \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k, \\ 0, \quad t \in \Omega \setminus \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k, \end{cases}$$

$$k = 1, 2, \dots, m.$$

Константы  $A_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ , выбираются таким образом, что  $|D^s \varphi_{i_1, \dots, i_l}^0| \leq N^{v\gamma} \ln^{u-1} N$ ,  $|D^s \varphi_{i_1, \dots, i_l}^k| \leq \rho_k^{-\gamma}$ . Оценим максимальное значение  $\varphi_{i_1, \dots, i_l}^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ . Очевидно,

$$\varphi_{i_1, \dots, i_l}^0(t) \geq ch_0^s N^{\nu\gamma} \ln^{u-1} N = c \left( \frac{1}{N} \right)^{\nu(s-\gamma)} \ln^{u-1} N = c \frac{\ln^{u-1} N}{N^s},$$

$$\varphi_{i_1, \dots, i_l}^k(t) \geq c \frac{h_k^s}{\rho_k^\gamma} = c \frac{\ln^{u-1} N}{N^s}, h_k = \rho_k - \rho_{k-1}, \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

$$\text{Пусть } \xi(t) = \sum_{k, i_1, \dots, i_l} C_{i_1, \dots, i_l}^k \varphi_{i_1, \dots, i_l}^k(t), \quad |C_{i_1, \dots, i_l}^k| \leq 1.$$

Здесь суммирование проводится по всем областям  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k \subset \Omega$ .

Повторяя рассуждения, приведенные в [5, 6], получаем оценку

$$\delta_n \left( \overline{Q}_{r, \gamma}^u(\Omega, 1) \right) \geq c N^{-s} \ln^{u-1} N = c n^{-(s-\gamma)/(l-1)} \ln^{u-1} n. \quad (21)$$

Из неравенств (10), (20), (21) следует

**Теорема 3.** Пусть  $\Omega = [-1, 1]^l$ ,  $l = 2, 3, \dots$ ,  $u = 1, 2, \dots$ ,  $v = s / (s - \gamma)$ ,  $v > l / (l - 1)$ . Справедливы оценки

$$c n^{-(s-\gamma)/(l-1)} \ln^{u-1} n \leq \delta_n \left( \overline{Q}_{r, \gamma}^u(\Omega, 1) \right) \leq d_n \left( \overline{Q}_{r, \gamma}^u(\Omega, 1), C \right) \leq c n^{-(s-\gamma)/(l-1)} \ln^u n,$$

и погрешности сплайнов  $f_n$  и  $f_N^*$  оцениваются величиной  $c n^{-(s-\gamma)/(l-1)} \ln^u n$ .

### 5. Класс функций $Q_{r, \gamma}^u(\Omega, 1)$ , $\Omega = [-1, 1]^l$ , $l = 2, 3, \dots$

Пусть  $u, r$  – целые числа,  $s = r + \lceil \gamma \rceil$ ,  $\mu = \gamma - \lceil \gamma \rceil$ .

**Теорема 4.** Пусть  $\Omega = [-1, 1]^l$ ,  $l \geq 2$ ,  $u = 1, 2, \dots$ ,  $v = s / (s - \gamma)$ ,  $v < l / (l - 1)$ . Справедлива оценка  $\delta_n(Q_{r, \gamma}^u(\Omega, 1)) \geq C n^{-s/l}$ .

**Доказательство.** Легко видеть, что  $Q_{r, \gamma}(\Omega, 1) \subset Q_{r, \gamma}^u(\Omega, 1)$ . Известно [2], что  $\delta_n(Q_{r, \gamma}(\Omega, 1)) \geq c n^{-s/l}$ . Следовательно,  $\delta_n(Q_{r, \gamma}^u(\Omega, 1)) \geq c n^{-s/l}$ .

**Теорема 5.** Пусть  $\Omega = [-1, 1]^l$ ,  $l \geq 2$ ,  $u = 1, 2, \dots$ ,  $v = s / (s - \gamma)$ ,  $v = l / (l - 1)$ . Тогда  $\delta_n(Q_{r, \gamma}^u(\Omega, 1)) \geq C n^{-s/l} (\ln n)^{u+s/l}$ .

**Доказательство.** Покроем область  $\Omega$  более мелкими областями  $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , подобно тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 1, полагая

$$M_k = \begin{cases} \left\lceil (\ln N)^{u/s} \right\rceil, & k = 0, \\ \left\lceil \left( \ln \frac{N}{k} \right)^{u/s} \right\rceil, & k = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

Оценим число  $n$  областей  $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Очевидно,

$$n \underset{\cap}{\cup} m \sum_{k=1}^{N-1} \left( \frac{2 - 2(k/N)^v}{((k+1)/N)^v - (k/N)^v} \right)^{l-1} M_k^l + 2mN^{v(l-1)} (\ln N)^{lu/s} \underset{\cap}{\cup} \\ \underset{\cap}{\cup} N^l (\ln N)^{1+ul/s}.$$

Пусть  $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k = [b_{i_1, j_1}, b_{i_1, j_1+1}; \dots; b_{i_l, j_l}, b_{i_l, j_l+1}]$ . Введем функции

$$\varphi_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k(t) = A_k \frac{\left( (t_1 - b_{i_1, j_1})(b_{i_1, j_1+1} - t_1) \dots (t_l - b_{i_l, j_l})(b_{i_l, j_l+1} - t_l) \right)^s}{(h_k / M_k)^{3s} ((k+1)/N)^{v\gamma}} \times \\ \times \left( 1 + \left| \ln^u \left( \frac{k+1}{N} \right)^v \right| \right) \text{ при } t \in \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k \text{ и} \\ \varphi_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k = 0 \text{ при } t \in \Omega \setminus \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k,$$

где  $h_k = ((k+1)/N)^v - (k/N)^v$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

Константы  $A_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , выбраны так, что

$$\left| D^s \varphi_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k \right| \leq \frac{1}{((k+1)/N)^{v\gamma}} \left( 1 + \left| \ln^u \left( \frac{k+1}{N} \right)^v \right| \right).$$

Очевидно, такие константы существуют и не зависят от  $N, u, \gamma$ .

Оценим максимальное значение  $\varphi_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k$ . Очевидно,

$$\varphi_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k(t) \geq c \frac{1}{N^{vs}} \frac{1}{\ln^u N} N^{v\gamma} (1 + \ln^u N^v) \geq c \frac{1}{N^s}.$$

Введем функцию  $\xi(t) = \sum_{k, i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l} C_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k \varphi_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k(t)$ ,

где  $\left| C_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k \right| \leq 1$  и суммирование проводится по всем областям  $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k \in \Omega$ .

Повторяя рассуждения [4], завершаем доказательство теоремы.

Построим локальные сплайны, являющиеся оптимальными методами аппроксимации функций класса  $\mathcal{Q}_{r\gamma}^\mu(\Omega, 1)$ .

Пусть  $v \leq l / (l - 1)$ . Покроем область  $\Omega$  более мелкими областями  $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k, k = 0, 1, \dots, N - 1$ , подобно тому, как это было сделано в разд. 2. Для этого ребра областей  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$  делим на  $M_k$  равных частей, где

$$M_k = \begin{cases} \left\lceil (\ln N)^{u/(r+1-\mu)} \right\rceil, & k = 0, \\ \left\lceil (\ln(N/k))^{u/s} \right\rceil, & k = 1, 2, \dots, N - 1, \end{cases}$$

и проводим через точки деления плоскости, параллельные координатным плоскостям.

В областях  $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k$  функция  $f$  интерполируется полиномами  $P_{s, \dots, s} \left( f, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k \right), k = 0, 1, \dots, N - 1$ , из которых составлен сплайн  $f_N$ .

*Замечание.* Полиномы  $P_{s, \dots, s} \left( f, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k \right)$  используются, если  $s \geq r + 2$ , а полиномы  $P_{s+1, \dots, s+1} \left( f, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k \right)$  используются, если  $s = r + 1$ . Без потери общности можно ограничиться рассмотрением случая, когда  $s \geq r + 2$ .

Повторяя рассуждения, проведенные в разд. 2, имеем

$$\|f - f_N\| \leq cN^{-s}. \quad (22)$$

Для того чтобы оценить сверху поперечник Колмогорова, нужно построить непрерывный сплайн  $f_N^*$ , имеющий погрешность, определяемую неравенством (22). Для этого повторим процедуру построения непрерывного локального сплайна, описанную в разд. 1. Можно показать, что построенный таким образом непрерывный локальный сплайн имеет погрешность  $cN^{-s}$ . Оценивая число  $n$  узлов сплайнов  $f_N$  и  $f_N^*$ , выражая  $n$  через  $N$  и повторяя рассуждения предыдущего раздела, приходим к следующему утверждению.

**Теорема 6.** Пусть  $\Omega = [-1, 1]^l, l = 2, 3, \dots, u, r$  – целые числа,  $s = r + \lceil \gamma \rceil, \mu = \gamma - \lfloor \gamma \rfloor, v = s / (s - \gamma), v \leq l / (l - 1)$ . Справедливы оценки

$$\begin{aligned} d_n \left( Q_{r, \gamma}^u(\Omega, 1), C \right) &\leq cn^{-s/l} \text{ при } v < l / (l - 1); \\ c \frac{(\ln n)^{(ul+s)/l}}{n^{s/l}} &\leq \delta_n(Q_{r, \gamma}^u(\Omega, 1)) \leq 2d_n(Q_{r, \gamma}^u(\Omega, 1), C) \leq c \frac{(\ln n)^{us/(r+1-\mu)}}{n^{s/l}}, \\ &\text{если } lu / (r + 1 - \mu) \geq ul / s + 1, \\ \delta_n(Q_{r, \gamma}^u(\Omega, 1)) &\cup d_n(Q_{r, \gamma}^u(\Omega, 1), C) \cup \frac{(\ln n)^{(ul+s)l}}{n^{s/l}}, \end{aligned}$$

если  $lu / (r+1-\mu) < ul / s+1$  при  $v = l / (l-1)$ .

Оценки справа достигаются на сплайнах  $f_N$  и  $f_N^*$ .

**Теорема 7.** Пусть  $\Omega = [-1, 1]^l$ ,  $l \geq 2$ ,  $v = s / (s - \gamma)$ ,  $v > l / (l - 1)$ . Тогда

$$\delta_n(Q_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)) \geq Cn^{-(s-\gamma)/(l-1)} \ln^u n.$$

Доказательство теоремы подобно доказательству теоремы 3. Различие заключается в том, что в данном случае функция  $\Phi_{i_1, \dots, i_l}^0(t)$  имеет вид

$$\Phi_{i_1, \dots, i_l}^0(t) = \begin{cases} A_0 \frac{\left( (t_1 - b_{i_1}^0)(b_{i_1+1}^0 - t_1) \cdots (t_l - b_{i_l}^0)(b_{i_l+1}^0 - t_l) \right)^s}{h_0^{(2l-1)s}} N^{\gamma l} \ln^u N, & t \in \Delta_{i_1, \dots, i_l}^0, \\ 0, & t \in \Omega \setminus \Delta_{i_1, \dots, i_l}^0. \end{cases}$$

**Теорема 8.** Пусть  $\Omega = [-1, 1]^l$ ,  $l \geq 2$ ,  $v = s / (s - \gamma)$ ,  $v > l / (l - 1)$ . Тогда  $d_n(Q_{r,\gamma}^u(\Omega, 1), C) \leq cn^{-(s-\gamma)/(l-1)} \ln^u n$ .

Доказательство подобно доказательству теоремы 3 и поэтому опускается.

Объединяя теоремы 7 и 8, приходим к следующему утверждению.

**Теорема 9.** Пусть  $\Omega = [-1, 1]^l$ ,  $l \geq 2$ ,  $u = 1, 2, \dots$ ,  $v = s / (s - \gamma)$ ,  $v > l / (l - 1)$ . Тогда

$$\delta_n(Q_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)) \cup d_n(Q_{r,\gamma}^u(\Omega, 1), C) \cup n^{-(s-\gamma)/(l-1)} \ln^u n.$$

*Замечание.* При доказательстве теоремы 8 строятся локальные сплайны  $f_N$  и  $f_N^*$ , которые являются оптимальными по порядку методами аппроксимации функций класса  $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)$  при  $v > l / (l - 1)$ .

## 6. Ненасыщаемые методы аппроксимации

Алгоритм построения ненасыщаемых методов аппроксимации классов функций  $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)$ ,  $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)$ ,  $\Omega = [-1, 1]^l$ ,  $l = 2, 3, \dots$ , изложим на примере класса функций  $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)$ .

В предыдущем разделе построены оптимальные по порядку методы аппроксимации классов функций  $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)$  и  $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)$ ,  $\Omega = [-1, 1]^l$ ,  $l = 2, 3, \dots$ . Построенные алгоритмы существенно зависят от параметров  $r, s, \gamma$ . Для каждой комбинации параметров приходится строить свой оптимальный по порядку алгоритм. Представляет интерес построение общего для всех сочетаний  $r, s, \gamma$  алгоритма, оптимального по порядку по крайней мере для достаточно большого числа узлов интерполяции.

Рассмотрим множество классов функций  $\bar{Q}_{r\gamma}^u(\Omega, 1)$ , у которых инвариантным является параметр  $v = s / (s - \gamma) = \text{const}$ . Для определенности положим  $v < l / (l - 1)$ . Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Рассмотрим класс функций  $\bar{Q}_{r\gamma}^u(\Omega, 1)$  с индексами  $u, r, \gamma$ , удовлетворяющими условию  $v = s / (s - \gamma) = \text{const}$ .

Пусть  $N$  – натуральное число  $q = \lceil \ln N \rceil$ .

Покроем область  $\Omega$  областями  $\Delta_{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_l}^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , способом, описанным при доказательстве теоремы 1. Построим сплайн  $f_N$ , состоящий из полиномов  $P_{q, \dots, q} \left( f, \Delta_{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_l}^k \right)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Пусть  $n$  – число узлов сплайна.

Оценим точность аппроксимации функции  $f$  сплайном  $f_N$ .

Нужно в отдельности рассмотреть следующие случаи:

1)  $q \geq s+1$ ,

2)  $q < s$ .

В первом случае, повторяя рассуждения, приведенные в разд. 1, имеем  $\|f - f_N\| \leq cN^{-s} (s! \ln^l(\ln N)) / q! \leq cn^{-s/l} \ln^s n$ . Таким образом, при  $q \geq s+1$  предложенный алгоритм отличается от оптимального по порядку множителем  $c \ln^s N$ .

Рассмотрим случай, когда  $q \leq s$ . Тогда

$$\|f - f_N\|_{C(\Omega)} \leq \frac{c}{N^{q+1}} \leq \frac{c(\ln n)^{q+1}}{n^{(q+1)/l}} \text{ при } q < rv \text{ и}$$

$$\|f - f_N\|_{C(\Omega)} \leq \frac{c}{N^s} \leq \frac{c(\ln n)^s}{n^{s/l}} \text{ при } rv \leq q \leq s.$$

Из полученных оценок следует, что при  $\lceil \ln N \rceil > s$  предложенный алгоритм является ненасыщаемым на классе  $\bar{Q}_{r\gamma}^u(\Omega, 1)$ ,  $\Omega = [-1, 1]^l$ ,  $l = 2, 3, \dots$ , при фиксированном параметре  $v = s / (s - \gamma) = \text{const}$ .

### Список литературы

1. **Бойков, И. В.** Поперечники Колмогорова и ненасыщаемые методы аппроксимации классов функций, определяемых решениями уравнений математической физики (Часть I. Функции одной переменной) / И. В. Бойков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 1 (29). – С. 65–78.
2. **Бойков, И. В.** Аппроксимация некоторых классов функций локальными сплайнами / И. В. Бойков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1998. – Т. 38, № 1. – С. 25–33.
3. **Бойков, И. В.** Оптимальные методы приближения функций и вычисления интегралов / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПензГУ, 2007. – 236 с.

4. **Никольский, С. М.** Курс математического анализа / С. М. Никольский. – М. : Наука, 1975. – Т. 1. – 432 с.
5. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / под ред. К. И. Бабенко. – М. : Наука, 1979. – 196 с.
6. **Бабенко, К. И.** О некоторых задачах теории приближений и численного анализа / К. И. Бабенко // Успехи математических наук. – 1985. – Т. 40, № 1. – С. 3–28.

### References

1. Boykov I. V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2014, no. 1 (29), pp. 65–78.
2. Boykov I. V. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of calculus mathematics and mathematical physics]. 1998, vol. 38, no. 1, pp. 25–33.
3. Boykov I. V. *Optimal'nye metody priblizheniya funktsiy i vychisleniya integralov* [Optimal functions of function approximation and integral calculation]. Penza: Izd-vo PenzGU, 2007, 236 p.
4. Nikol'skiy S. M. *Kurs matematicheskogo analiza* [Course of mathematical analysis]. Moscow: Nauka, 1975, vol. 1, 432 p.
5. *Teoreticheskie osnovy i konstruirovaniye chislennykh algoritmov zadach matematicheskoy fiziki* [Theoretical basis and building of numerical algorithms of mathematical physics' problems]. Ed. by K. I. Babenko. Moscow: Nauka, 1979, 196 p.
6. Babenko K. I. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Progress of mathematical sciences]. 1985, vol. 40, no. 1, pp. 3–28.

---

#### **Бойков Илья Владимирович**

доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой  
высшей и прикладной математики,  
Пензенский государственный  
университет (Россия, г. Пенза,  
ул. Красная, 40)

E-mail: boikov@pnzgu.ru

#### **Boykov Ilya Vladimirovich**

Doctor of physical and mathematical  
sciences, professor, head of sub-department  
of higher and applied mathematics, Penza  
State University (40 Krasnaya street,  
Penza, Russia)

---

УДК 519.6

**Бойков, И. В.**

**Поперечники Колмогорова и ненасыщаемые методы аппроксимации классов функций, определяемых решениями уравнений математической физики (Часть II. Функции многих переменных) / И. В. Бойков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 3 (31). – С. 5–21.**